Instruktioner: Svara på alla uppgifter. Det finns sju uppgifter och varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. För godkänt betyg räcker 9 poäng. En tentand som fått färre än 9 skrivningspoäng får addera intjänade bonuspoäng till sin skrivningspoäng så länge summan av bonuspoäng och skrivningspoäng inte överstiger 9. Lösningarna skall vara välmotiverade och ordentligt skrivna. Inga hälpmedel tillåtna. Lycka till!

(1) (a) Anta att $k \in \mathbf{N}$ och $a \in \mathbf{R}$ uppfyller villkoren

$$k \geq a - 1 \quad \text{och} \quad k! > a^k. \tag{$\spadesuit$}$$

Bevisa att villkoren i ($\spadesuit$) medför att $n! > a^n$ for alla $n \in \mathbf{N}$ så att $n \geq k$.

(b) Vilket är det minsta naturliga talet k så att villkoren ($\spadesuit$) stämmer om $a = 2$?

(2) Använd att

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi,$$
$$\sin(\theta + \varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi$$

och

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

för alla $\theta, \varphi \in \mathbf{R}$ för att visa

$$\cos^3\theta = \frac{\cos(3\theta) + 3\cos\theta}{4}$$

för alla $\theta \in \mathbf{R}$.

(3) (a) Definiera a^x för $a > 0$ och $x \in \mathbf{R}$.

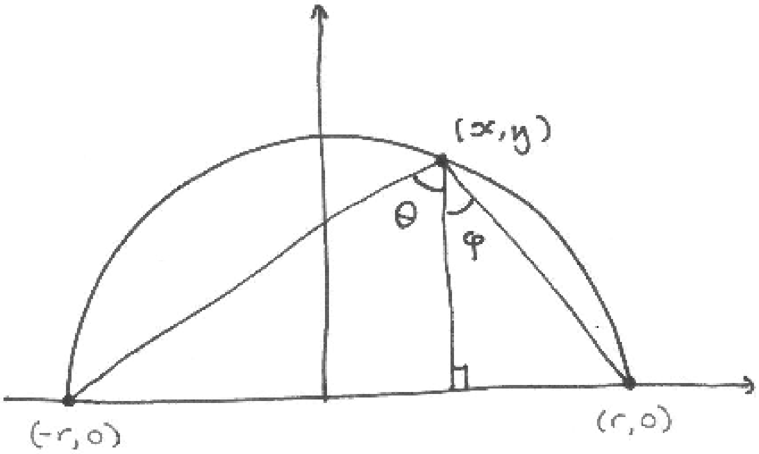
(b) Använd bara egenskaper av exponential- och logaritmfunktionen för att visa $x \mapsto a^x$ är en växande funktion om $a > 1$.

(4) Bevisa att

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

for varje $n \in \mathbf{N}$.

(5) (a) Betrakta en punkt (x, y) i planet som ligger på en cirkel med radien $r > 0$ och medel punkt i origo. Det innebär då att $x^2 + y^2 = r^2$. Låt $y > 0$, och θ och φ vara vinklarna i bilden nedan. Visa att $\cos(\theta + \varphi) = 0$ för alla (x, y).



(6) (a) Definiera $e^{i\theta}$ för $\theta \in \mathbf{R}$.

(b) Bevisa att

$$\frac{e^{ix}}{e^{iy}} = e^{i(x-y)}$$

för alla reella tal x och y. Endast definitioner och trigonometriska räknelagar får användas utan att de först bevisas.

(7) (a) Kom ihåg att $k! := \prod_{j=1}^{k} j = k(k-1)\ldots 2 \times 1$ för $k \in \mathbf{N}$. Visa att

$$k! > (k/2)^{k/2} \qquad (\clubsuit)$$

för jämna $k \in \mathbf{N}$. (Oliketen ($\clubsuit$) gäller även för udda k men det behövs inte visas.)

(b) Använd ($\clubsuit$) för att visa villkoren

$$k \geq a - 1 \quad \text{och} \quad k \geq 2a^2$$

medför dem i ($\spadesuit$).